CONCOURS EXTERNE I.E.E.A.C. CF et CT

Epreuve commune de **Mathématiques**

Durée : 3 heures

Coef. : 1

On pourra admettre les propriétés que l'on demande d'établir dans les questions 1.1 et 1.2 pour traiter la suite du problème.

PREMIERE PARTIE

$\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble des entiers naturels.*

A toute série de terme général u_n, réel ou complexe, n parcourant $\mathbb{N}$, et notée $\hat{U}$ on associe la série, notée $\hat{V}$, de terme général :

$$v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p ,$$

où les nombres C_n^p sont les coefficients du binôme de Newton et $C_o^o = 1$.

I.1. - U_n et V_n désignant la somme des $n+1$ premiers termes des séries $\hat{U}$ et $\hat{V}$ respectivement, montrer par récurrence sur n que pour tout n :

$$V_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n} C_{n+1}^{p+1} U_p .$$

I.2. - On suppose que la série $\hat{U}$ converge et on désigne sa somme par U. Montrer alors que pour tout n :

$$V_n - U\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n} C_{n+1}^{p+1} (U_p - U) \quad ;$$

en déduire qu'à tout réel $\varepsilon > 0$ on peut associer un entier naturel $N(\varepsilon)$ tel que, si $n \geq N(\varepsilon)$, alors :

$$\left|V_n - U\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{N(\varepsilon)} C_{n+1}^{p+1} \left|U_p - U\right| \quad ;$$

$N(\varepsilon)$ étant ainsi fixé, montrer qu'il existe un entier $M(\varepsilon)$ tel que, si $n \geq M(\varepsilon)$, alors :

$$\left|V_n - U\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right| \leq \varepsilon$$

En déduire la propriété P suivante : si la série $\hat{U}$ converge et admet U pour somme, alors $\hat{V}$ converge et admet aussi U pour somme.

I.3. - On se propose d'étudier le cas particulier où, z étant un nombre complexe quelconque, $u_n = z^n$

Calculer v_n et déterminer les ensembles $D(\hat{U})$ et $D(\hat{V})$ des valeurs de z pour lesquelles les séries $\hat{U}$ et $\hat{V}$ convergent respectivement. Représenter ces deux ensembles dans le plan affine euclidien représentatif du corps des complexes ou "plan complexe".

$D(\hat{U})$ est-il inclus dans $D(\hat{V})$? Ces deux ensembles sont-ils égaux ?
La réciproque de la propriété P énoncée à la fin de I.2. est-elle nécessairement vraie ?

Etudier suivant la valeur de z le comportement de $\left|\frac{v_n}{u_n}\right|$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire qu'il existe un sous ensemble Δ du plan complexe tel que, pour tout z dans Δ, les sommes partielles U_n et V_n vérifient pour tout $n > 0$ l'inégalité :

$$|U - V_n| < |U - U_n| .$$

Représenter dans le "plan complexe" Δ en le hachurant. Comparer les manières dont $\hat{U}$ et $\hat{V}$ convergent suivant les valeurs de z pour lesquelles les deux séries sont toutes les deux convergentes.

DEUXIEME PARTIE

x est une variable réelle, et n et p des entiers naturels.

II.1 - Déterminer le rayon de convergence et, lorsqu'elle converge, la somme de chacune des deux séries de terme général respectif :

$(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ pour $n \geq 1$; $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $n \geq 0$.

Tournez la page S.V.P.

Utilisant une propriété des séries alternées, donner des majorations respectivement de :

$\left|(\mathrm{Log}(1+x)) - \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p}\right|$, Log désignant le logarithme népérien, et de

$\left|(\mathrm{Arc\ tg}\ x) - \sum_{p=0}^{n} (-1)^{p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right|$, valables uniformément par rapport à $x \in [0,1]$.

En déduire que :

$\mathrm{Log}\ 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

II.2 - a est un réel strictement positif.

Etablir la convergence pour tout $n \geq 0$ de l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 t^n (1-t)^{a-1}\, dt.$$

Les notations étant celles du I.1. et I.2. on considère le cas particuliers où $u_n = \frac{(-1)^n}{n+a}$.

Montrer que $v_n = \frac{1}{2^{n+1}} I_n$ et établir une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $\{I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots\}$.

On pose : $w_n = n^a I_n$.

Donner le développement limité à l'ordre 2 par rapport à $\frac{1}{n}$ de $\mathrm{Log}\ \frac{w_{n+1}}{w_n}$

et en déduire que w_n admet une limite finie w lorsque n tend vers $+\infty$;

donner un équivalent de v_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

II.3 - Appliquant aux cas où $a=1$ et $a = \frac{1}{2}$ les résultats précédents, établir la convergence des séries de terme général :

$\frac{1}{n\, 2^n}$, pour $n \geq 1$, et $\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$, pour $n \geq 0$;

Calculer la somme de ces deux dernières séries.

TROISIEME PARTIE

n et m sont des entiers naturels, E est l'ensemble des séries numériques absolument convergentes de terme général u_n complexe, une telle série est notée $\hat{U}$ et la somme de $\hat{U}$ est notée U.

III.1 - Montrer que les règles de l'addition des séries et de la multiplication d'une série par un nombre complexe confèrent à E la structure d'un espace vectoriel sur le corps des complexes.

III.2 - Les notations étant toujours celles des I.1 et I.2, montrer qu'on définit un endomorphisme L de E en associant à toute série $\hat{U}$ de E la série $\hat{V}$ correspondante.

Montrer que l'application N de E dans l'ensemble des réels définie par :

$N : \hat{U} \to N(\hat{U}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} |u_p|$ est une norme sur E.

III.3 - Montrer que si $\hat{U}$ est élément de E et si $\hat{V} = L(\hat{U})$ alors on a

$N(L(\hat{U})) = N(\hat{V}) \leq N(\hat{U})$.

III.4 - Un élément $\hat{U}_m$ d'une suite $\{\hat{U}_m\}_{m=0,1,2,\ldots,p,\ldots}$ d'éléments de E est une série dont le terme général $u_n(m)$ de rang n dépend de m.

Soit une suite $\{\hat{U}_m\}_{m=0,1,2,\ldots,p,\ldots}$ telle que la suite des nombres réels $N(\hat{U}_m)$ tend vers zéro lorsque m tend vers $+\infty$. Montrer que pour <u>tout n</u> la suite des nombres complexes $u_n(m)$, $m = 0,1,2, \ldots, p, \ldots$ tend vers zéro ;

montrer que la suite $\{\hat{V}_m\}_{m=0,1,2,\ldots,p,\ldots}$ image de la suite $\{\hat{U}_m\}_{m=0,1,2,\ldots,p,\ldots}$ par L, converge vers la série dont tous les termes sont nuls.

On définit la norme M(L) de l'application L , définie en III.2, par :

$M(L) = \sup_{N(\hat{U})=1} \{N(\hat{V})\}$, où $\hat{V} = L(\hat{U})$,

montrer que $M(L) = 1$.

III.5 - <u>Application</u> : Trouver, grâce à la propriété établie en III.4, la limite lorsque $m \to \infty$ de l'expression :

$$S_m = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} \left(\frac{1}{m+1}\right)^{p+1} \right]$$

Vérifier le résultat obtenu en calculant effectivement la somme ci-dessus pour tout entier m strictement positif.